En el tema anterior tratamos los aspectos fundamentales de la teoría de la probabilidad. Aun con estas herramientas básicas vimos que podemos resolver algunos problemas aplicados. Sin embargo el $\underline{\underline{\Omega}}$ que necesitamos hace que la solución de muchos problemas reales sea demasiado complicada. Lo que necesitamos es una manera de mapear Ω a los números reales. Esto lo logramos vía variables aleatorias.

Definición

Dado un experimento con espacio muestral Ω, sea X una función que asigna a cada elemento $\omega \in \Omega$, uno y sólo un número real $X(\omega) = x$. A la función X se le llama variable aleatoria (v.a.)

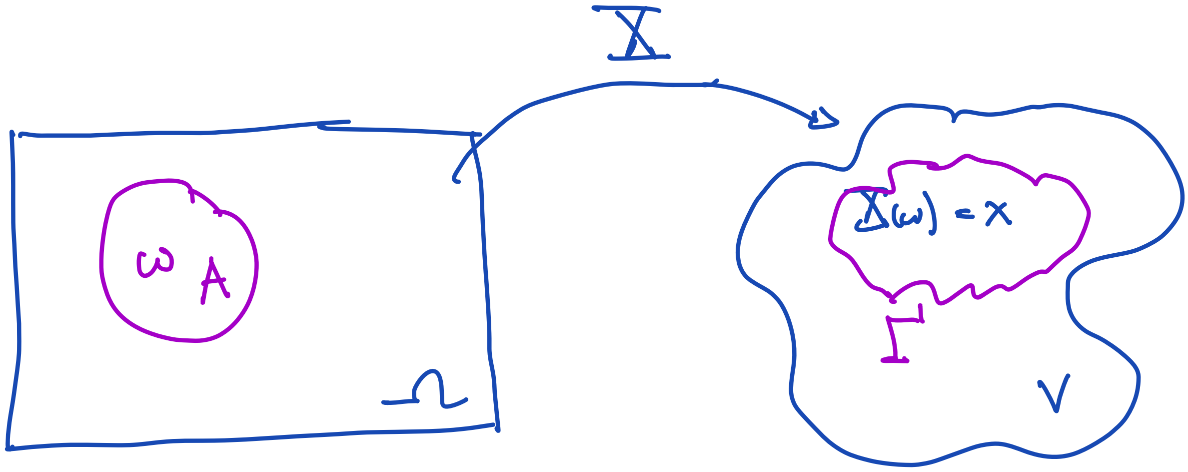
Sucede lo siguiente

1: X mapea de forma sobreyectiva a Ω en un conjunto $V \subset \mathbb{R}$, i.e.

$$V = \{ x \in \mathbb{R} \mid X(\omega) = x, \text{ para } \omega \in \Omega \}$$

V se genera a partir de $\underline{\underline{\Omega}}$ simplemente tomando cada elemento $\omega \in \Omega$ y aplicando $X(\omega) = x$

2: La probabilidad P obtenida analizando el experimento en Ω crea una probabilidad P_X definida en V inducida por X.



Lo que se busca en esta parte es simplemente una justificación "formal" de que X induce una probabilidad P_X a partir de (Ω, P) que cumple con todas las propiedades de una probabilidad. Después de esto y en general en la práctica rara vez pensaremos en el conjunto Ω y en la función de probabilidad original P. Simplemente nos concentraremos en X y el tipo de fenómenos aleatorios que puede describir

La pregunta es, ¿Cómo definimos P_X a partir de (Ω, P) y X? Regresemos a lo que conocemos, i.e. (Ω, P)

$$\boxed{\text{Ejemplo fácil para entender ideas.}}$$

Experimento. Lanzamiento de 3 monedas y X cuenta el número de soles.

Estructura de prob.

(Ω, P)

$\Omega = \{(A,A,A), (A,A,S), (A,S,A), (S,A,A)$
$(S,S,S), (S,S,A), (S,A,S), (A,S,S)\}$
$\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8\}$

$P(\omega_j) = 1/8 \ , \quad j = 1, \dots, 8$

$P(A) = \sum_{\omega_j \in A} P(\omega_j) \ ,$ para cualquier $A \subset \Omega$

Aplico X a cada $\omega \in \Omega$

$X(\omega) =$ numero de soles obtenidos en los 3 volados

$X(\omega_1) = 0$
$X(\omega_2) = 1, \ X(\omega_3) = 1, \ X(\omega_4) = 1$
$X(\omega_5) = 2, \ X(\omega_6) = 2, \ X(\omega_7) = 2$
$X(\omega_8) = 3$

$\Rightarrow \quad V = \{0, 1, 2, 3\}$

¿Cómo obtengo P_X?

pre-imagen

$$P_X(0) = P_X(X = 0)$$

$$= P(\{\omega : X(\omega) = 0\})$$

$$= P(\omega_1) = 1/8$$

$$P_X(X=1) = P(\{\omega : X(\omega)=1\})$$
$$= P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4)$$
$$= 3/8$$

$$P_X(X=2) = P(\{\omega : X(\omega)=2\})$$
$$= P(\omega_5) + P(\omega_6) + P(\omega_7)$$
$$= 3/8$$

$$P_X(X=3) = P(\omega_8) = 1/8$$

Sabemos que $\underline{P}$ es una probabilidad, como P_X se obtiene a través de la pre-imagen y al final se define como función de P $\Rightarrow$ también es una probabilidad.

De forma general

$$P_X(A) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\})$$

Importante

- La variable aleatoria es X, uno de los posibles valores que puede tomar es $x \in \mathbb{R}$.

- En general no nos preocupará la existencia de (Ω, P) y simplemente usaremos $P(X=x)$, en donde $P(\underline{X}=x)$ es la probabilidad de que la v.a. tome el valor particular de x ó $P(\underline{X}\in A)$, la probabilidad de que la v.a. tome valores en un conjunto A.

Tipos de variables aleatorias

Una v.a. puede ser discreta o continua, esto lo determina el conjunto $\underline{V}$. Para una variable discreta V es un conjunto numerable, mientras que para una variable continua V es un intervalo en $\mathbb{R}$.

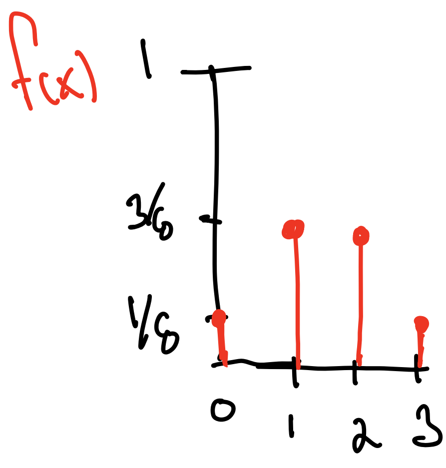
Lanzamiento 3 monedas $\underline{X}$ cuenta soles

Por ejemplo.

$$P(\underline{X}=x)\begin{cases} 1/8, & x=0 \\ 3/8, & x=1,2 \\ 1/8, & x=3 \end{cases}$$

$V=\{0,1,2,3\} \Rightarrow \underline{X}$ es una v.a. discreta

$$f_{\underline{X}}(x) = P(\underline{X}=x)$$



$f(x)$ nos dice como se distribuye la v.a. en $\underline{V}$

Si realizaremos 1,000 experimentos

1- $(A, S, A) \longrightarrow X = 1$

2

⋮

1000 $(S, S, A) \longrightarrow X = 2$

veriamos su aprox x

$1{,}000(1/8)$ = aprox en 125 experimentos no ocurrió ningun sol

$1{,}000(3/8)$ = aprox en 375 experiment ocurrió 1 sol

$1{,}000(3/8)$ = aprox en 375 exp ocurrió 2 soles

$(1{,}000)\,1/8$ = aprox en 125

A $f(x)$ se le llama la función de masa de probabilidad en el caso de v.a. discretas

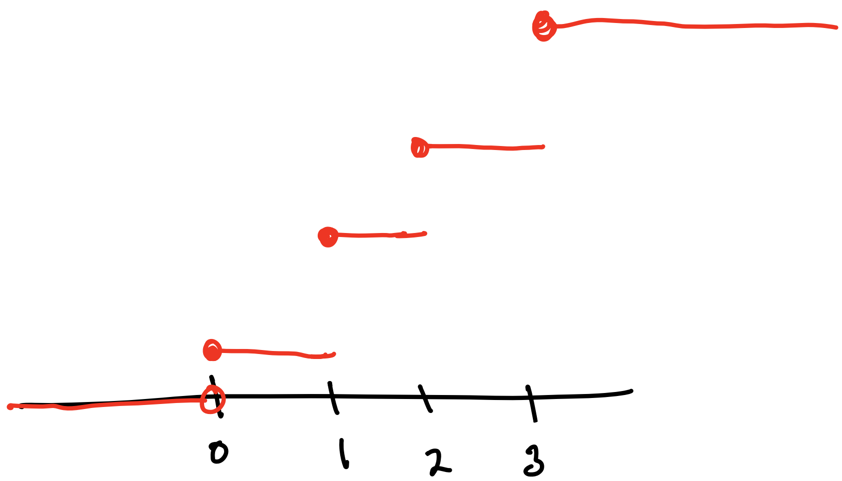
$$F(x) = \sum_{y \leq x} f(x)$$ ← la función de distribución acumulada

$F(0) = 1/8$

$F(1) = f(0) + f(1) = \frac{4}{8}$

$F(2) = f(0) + f(1) + f(2) = 5/8$

$F(3) = 1$



Solución de examen

Conceptos

① - Es una medida del grado de incertidumbre acerca de la ocurrencia o no de un cierto evento

si $P(A)=0$, tenemos la certeza de que A no ocurrirá
$P(A)=1$, tenemos la certeza de que A ocurrirá
$P(A)=1/2$ tenemos la máxima incertidumbre

② $B_1, \ldots, B_j$ t.q. $\bigcup B_j = \Omega$ y $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)$$

③ $$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

se utiliza para obtener $P(A|B)$ a partir de $P(B|A)$

en la práctica $P(A)$ será nuestro conocimiento previo de algún fenómeno y vía ③ actualizamos este conocimiento vía

④ $$P(A \cap B) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \cap B = \emptyset \text{ eventos disjuntos o mutuamente ex} \\ P(A)P(B) & \text{eventos indep} \end{cases}$$

(5) Quiere decir que la ocurrencia de $\underline{B}$ no tiene impacto en la ocurrencia de A.

Teoría

1.1 $P(B) = P(B\cap A) + P(B\cap A^c)$

$= P(A) + \underbrace{P(B\cap A^c)}_{\geq 0} \geq P(A)$

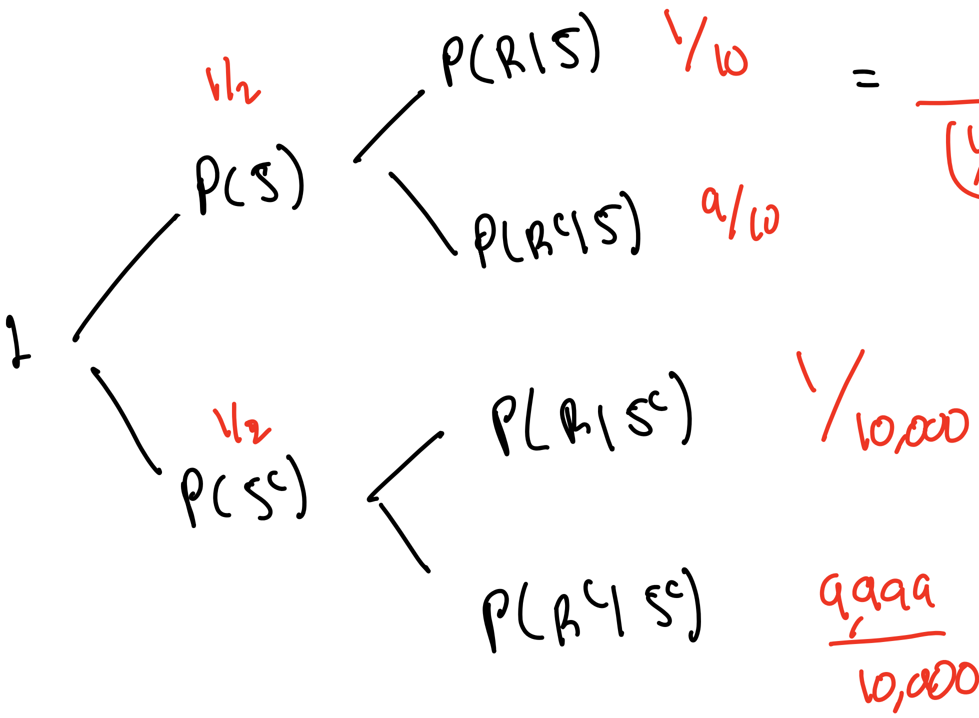
1.2 $P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B^c)$

$= P(A)P(B)$

$P(A\cap B^c) = P(A)(1-P(B)) = P(A)P(B^c)$

(2) $P(S|R) = \dfrac{P(R|S)P(S)}{P(R)} = \dfrac{P(R|S)P(S)}{P(R|S)P(S) + P(R|S^c)P(S^c)}$

$= \dfrac{(1/10)\cancel{(1/2)}}{(1/10)\cancel{(1/2)} + (1/10{,}000)\cancel{1/2}}$



$$= \frac{\frac{1}{10}}{\left(\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{1{,}000}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1{,}000}} = \frac{1}{\frac{1{,}001}{1{,}000}} = \frac{1{,}000}{1{,}001}$$

$$\approx 0.999$$

2 $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,2), (1,4), (1,5), (1,6)$
$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), \boxed{(2,5)}, (2,6)$
$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)$
$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)$
$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)$
$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

$A = \{X = 2\}$
$B = \{X + Y = 7\}$

$P(A \cap B) = 1/36$

$P(A) = 6/36 = 1/6$

$P(B) = 6/36 = 1/6$

$\Big\}\ P(A)P(B) = 1/36$

$\Rightarrow A \perp B$